Soluzione dell'esercizio L(13) del paragrafo 2.3.9, mediante ragionamento semantico

È possibile formalizzare il problema utilizzando un linguaggio con la costante V, il simbolo funzionale a un posto c (per indicare la cardinalità di un oggetto), e simboli di predicato i^1 (essere un insieme), m^2 (essere maggiore di) e s^2 (essere un sottoinisieme di). Il ragionamento è corretto se e solo se:

$$\begin{array}{l}\forall x(i(x) \rightarrow \exists y(i(y) \wedge m(c(y), c(x)))),\\ \quad \forall x\forall y(s(x, y) \rightarrow \neg m(c(x), c(y)))\\ \quad \forall x\, s(x, V) \;\models\; \neg i(V)\end{array}$$

Assumiamo che il ragionamento non sia corretto. Quindi esistono un'interpretazione $\mathcal{M}$ e un'assegnazione s su $\mathcal{M}$ tali che:

1. $(\mathcal{M}, s) \models \forall x(i(x) \rightarrow \exists y(i(y) \wedge m(c(y), c(x))))$
2. $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\forall y(s(x, y) \rightarrow \neg m(c(x), c(y)))$
3. $(\mathcal{M}, s) \models \forall x\, s(x, V)$
4. $(\mathcal{M}, s) \not\models \neg i(V)$

Sia D il dominio di $\mathcal{M}$ e $d_0 \in D$ l'interpretazione di V:

$$\mathcal{M}(V) = d_0$$

Per la 4 si ha che

(a) $d_0 \in \mathcal{M}(i)$

Per la 1 si ha che per ogni $d \in D$:

$$(\mathcal{M}, s[d/x]) \models i(x) \rightarrow \exists y(i(y) \wedge m(c(y), c(x)))$$

quindi in particolare anche

$$(\mathcal{M}, s[d_0/x]) \models i(x) \rightarrow \exists y(i(y) \wedge m(c(y), c(x)))$$

Da ciò segue che $(\mathcal{M}, s[d_0/x]) \not\models i(x)$ oppure $(\mathcal{M}, s[d_0/x]) \models \exists y(i(y) \wedge m(c(y), c(x)))$. Ma il primo caso (equivalente a $d_0 \notin \mathcal{M}(i)$) non è possibile, perché contraddice la (a), quindi si deve avere $(\mathcal{M}, s[d_0/x]) \models \exists y(i(y) \wedge m(c(y), c(x)))$, cioè deve esistere un oggetto $d_1 \in D$ tale che:

(b) $d_1 \in \mathcal{M}(i)$

e $(\mathcal{M}, s[d_0/x, d_1/y]) \models m(c(y), c(x))$. Se $F : D \rightarrow D$ è l'interpretazione di c ($F = \mathcal{M}(c)$), e

$$F(d_0) = d_2 \qquad F(d_1) = d_3$$

si deve allora avere che $\langle s[d_0/x, d_1/y](c(y)), s[d_0/x, d_1/y](c(x))\rangle \in \mathcal{M}(m)$, cioè

(c) $\langle d_3, d_2 \rangle \in \mathcal{M}(m)$

Consideriamo ora la 3: si deve avere che per ogni $d \in D$, $(\mathcal{M}, s[d/x]) \models s(x, V)$, cioè per ogni $d \in D$ $\langle d, d_0 \rangle \in \mathcal{M}(s)$. In particolare anche:

(d) $\langle d_1, d_0 \rangle \in \mathcal{M}(s)$

Per la 2, si deve avere che per ogni $d, d' \in D$, o $(\mathcal{M}, s[d/x, d'/y]) \not\models s(x, y)$ oppure $(\mathcal{M}, s[d/x, d'/y]) \models \neg m(c(x), c(y))$. Ciò vale anche per $d = d_1$ e $d' = d_0$, quindi deve valere uno dei due casi seguenti:

(e1) $(\mathcal{M}, s[d_1/x, d_0/y]) \not\models s(x, y)$, cioè $\langle d_1, d_0 \rangle \notin \mathcal{M}(s)$;

(e2) $(\mathcal{M}, s[d_1/x, d_0/y]) \models \neg m(c(x), c(y))$, cioè $\langle d_3, d_2 \rangle \notin \mathcal{M}(m)$.

Ma entrambi i casi sono impossibili: (e1) contraddice (d) e (e2) contraddice (c).

Quindi è impossibile che esista un'interpretazione in cui sono vere tutte le premesse e falsa la conclusione: il ragionamento è corretto.