Soluzione dell'esercizio 15 del paragrafo 2.3.9
mediante derivazione in NK

È possibile formalizzare il problema in modi diversi. Consideriamo qui le derivazioni che si possono costruire per due diverse formalizzazioni della conclusione del ragionamento:

Caso 1: Il problema è formalizzato come segue:

$$\begin{array}{l}\exists x(m(x) \land \forall y(f(y) \to a(x,y))),\\ \forall x(m(x) \to \forall y(t(y) \to \neg a(x,y)))\\ \qquad\qquad \vdash_{NK} \neg\exists z(f(z) \land t(z))\end{array}$$

1	1.	$\exists x(m(x) \land \forall y(f(y) \to a(x,y)))$	*ipotesi*
2	2.	$\forall x(m(x) \to \forall y(t(y) \to \neg a(x,y)))$	*ipotesi*
3	3.	$\exists z(f(z) \land t(z))$	*ipotesi*
4	4.	$m(x) \land \forall y(f(y) \to a(x,y))$	*ipotesi*
4	5.	$m(x)$	$E\land(4)$
4	6.	$\forall y(f(y) \to a(x,y))$	$E\land(4)$
7	7.	$f(z) \land t(z)$	*ipotesi*
7	8.	$f(z)$	$E\land(7)$
7	9.	$t(z)$	$E\land(7)$
4	10.	$f(z) \to a(x,z)$	$E\forall(6)$
4, 7	11.	$a(x,z)$	$E\to(8,10)$
2	12.	$m(x) \to \forall y(t(y) \to \neg a(x,y))$	$E\forall(2)$
2, 4	13.	$\forall y(t(y) \to \neg a(x,y))$	$E\to(5,12)$
2, 4	14.	$t(z) \to \neg a(x,z)$	$E\forall(13)$
2, 4, 7	15.	$\neg a(x,z)$	$E\to(9,14)$
2, 4, 7	16.	$\bot$	$E\neg(11,15)$
2, 3, 4	17.	$\bot$	$E\exists(3,16)$ – scarica 7
1, 2, 3	18.	$\bot$	$E\exists(1,17)$ – scarica 4
1, 2	19.	$\neg\exists z(f(z) \land t(z))$	$I\neg(18)$ – scarica 3

L'ipotesi alla riga 3 è introdotta allo scopo di condurre un ragionamento per assurdo: si assume $\exists z(f(z) \land t(z))$, alla riga 18 se ne deriva $\bot$ e si conclude quindi mediante la regola di introduzione della negazione.

L'ipotesi della riga 4 è introdotta con l'obiettivo di eliminare il quantificatore esistenziale della riga 1: x è un "testimone" per $\exists x(m(x) \land \forall y(f(y) \to a(x,y)))$. Da questa ipotesi si deriva $\bot$ (che non contiene x) alla riga 17 , che non dipende da altre ipotesi contenente x libera, quindi si può applicare $E\exists$ e scaricare l'ipotesi 4 (ottenendo la riga 18).

Tra le righe 3 e 17 è contenuto un analogo ragionamento che sfrutta la formula esistenziale della riga 3: alla riga 7 viene introdotta l'ipotesi $f(z) \land t(z)$: z è un "testimone" per $\exists z(f(z) \land t(z))$. Da questa ipotesi si deriva $\bot$ (che non contiene z) alla riga 16, che non dipende da altre ipotesi contenente z libera, quindi si può applicare $E\exists$ e scaricare l'ipotesi 7, ottenendo la riga 17.

Caso 2: Il problema è formalizzato come segue:

$$\exists x(m(x) \wedge \forall y(f(y) \to a(x,y))),$$
$$\forall x(m(x) \to \forall y(t(y) \to \neg a(x,y)))$$
$$\vdash_{NK} \forall z(f(z) \to \neg t(z)))$$

1	1.	$\exists x(m(x) \wedge \forall y(f(y) \to a(x,y)))$	*ipotesi*
2	2.	$\forall x(m(x) \to \forall y(t(y) \to \neg a(x,y)))$	*ipotesi*
3	3.	$m(x) \wedge \forall y(f(y) \to a(x,y))$	*ipotesi*
3	4.	$m(x)$	$E \wedge (3)$
3	5.	$\forall y(f(y) \to a(x,y))$	$E \wedge (3)$
2	6.	$m(x) \to \forall y(t(y) \to \neg a(x,y))$	$E\forall(2)$
$2,3$	7.	$\forall y(t(y) \to \neg a(x,y))$	$E \to (4,6)$
8	8.	$f(z)$	*ipotesi*
3	9.	$f(z) \to a(x,z)$	$E\forall(5)$
$3,8$	10.	$a(x,z)$	$E \to (8,9)$
11	11.	$t(z)$	*ipotesi*
$2,3$	12.	$t(z) \to \neg a(x,z)$	$E\forall(7)$
$2,3,11$	13.	$\neg a(x,z)$	$E \to (11,12)$
$2,3,8,11$	14.	$\perp$	$E\neg(10,13)$
$2,3,8$	15.	$\neg t(z)$	$I\neg(14)$ – scarica 11
$2,3$	16.	$f(z) \to \neg t(z)$	$I \to (15)$ – scarica 8
$2,3$	17.	$\forall z(f(z) \to \neg t(z))$	$E\forall(16)$
$1,2$	18.	$\forall z(f(z) \to \neg t(z))$	$E\exists(1,17)$ – scarica 3

In questa derivazione, la riga 3 assume che x sia un "testimone" per la formula esistenziale della riga 1. Da questa ipotesi si deriva la formula della riga 17 che non contiene x libera e non dipende da altre assunzioni contenenti x libera. Quindi si può applicare la regola $E\exists$ per ottenere la riga 18.

L'ipotesi della riga 8 è introdotta con l'intenzione di derivare $\neg t(z)$ (riga 15) e quindi concludere, per introduzione dell'implicazione, che $f(z) \to \neg t(z)$ (riga 16). Questa conclusione non dipende da alcuna ipotesi contenente z libera (la 8 è stata scaricat), quindi si può correttamente applicare la regola di introduzione del quantificatore universale per ottenere la riga 17.

L'ipotesi della riga 11 è introdotta allo scopo di derivarne $\perp$ (riga 14) ed introdurre quindi la negazione (riga 15).